$$\int_a^b \rho(t)\,\|\overrightarrow{c}''(t)\|^2\,dt = 0$$

をえる．したがって，ρ の任意性から $\overrightarrow{c}''(t) = \mathbf{0}$ $(t \in [a,b])$，つまり，c が測地線であることが示され，(ii) が導かれる．

後半部を示そう．c が定速であるとする．この場合，(ii) が成り立つならば，(iii), (iv), (v) が成り立つことは，定理 1.6.1, 1.6.2 における変分公式から直接導かれる．逆は，c が定速であることから，上述の C^r 級関数 ρ を用いた C^r 変形 δ が c の両端固定の C^r 変形であると同時に C^r 法変形でもあることに注意して，上述と同様の議論を行うことにより示される．□

$\mathcal{L}, \mathcal{E}$ に対し，次の**第 2 変分公式**（**the second variational formula**）とよばれる公式が成り立つ．

$\boxed{\textbf{定理 1.6.4}}$（**$\mathcal{L}, \mathcal{E}$ の第 2 変分公式**）c を測地線とし，δ を c の両端固定の C^r 変形，~~または C^r 法変形~~とする．このとき，次の積分公式が成り立つ：

法

$$\left.\frac{d^2}{du^2}\right|_{u=0} \mathcal{L}(c_u) = -\frac{1}{l}\int_a^b \boldsymbol{V}''(t)\cdot\boldsymbol{V}(t)\,dt,$$

$$\left.\frac{d^2}{du^2}\right|_{u=0} \mathcal{E}(c_u) = -2\int_a^b \boldsymbol{V}''(t)\cdot\boldsymbol{V}(t)\,dt.$$

証明　$l := \|\overrightarrow{c}'(t)\|$ とおく．δ は両端固定の C^r 変形，~~または C^r 法変形な~~ので，定理 1.6.1 の証明によれば，

$$\frac{d}{du}\mathcal{L}(c_u) = \cancel{-\frac{1}{l}\int_a^b \left(\frac{\partial\overrightarrow{\delta}}{\partial u}\right)_{(t,u)}\cdot\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{\delta}}{\partial t^2}\right)_{(t,u)} dt}$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\|c_u'(t)\|}\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{\delta}}{\partial t\,\partial u}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{\delta}}{\partial t}\right)dt$$

が成り立つ．これに基点付き微分作用素 $\left.\dfrac{d}{du}\right|_{u=0}$ を作用させて，c が測地線であること と δ が両端固定の C^r 法変形であること に注意すると，

$$\left.\frac{d^2}{du^2}\right|_{u=0} \mathcal{L}(c_u) \cancel{= \left.\frac{d}{du}\right|_{u=0}\left(-\frac{1}{l}\int_a^b \left(\frac{\partial\overrightarrow{\delta}}{\partial u}\right)_{(t,u)}\cdot\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{\delta}}{\partial t^2}\right)_{(t,u)} dt\right)}$$

$$= -\frac{1}{l^3}\int_a^b (V'(t)\cdot\overrightarrow{c}'(t))^2\,dt + \frac{1}{l}\left[\left.\frac{\partial^2\overrightarrow{\delta}}{\partial u^2}\right|_{u=0}\cdot\overrightarrow{c}'(t)\right]_a^b + \frac{1}{l}\int_a^b \|V'(t)\|^2\,dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^b \|V'(t)\|^2\,dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}(V(t)\cdot V'(t)) - V''(t)\cdot V(t)\right)dt$$

$$= -\frac{1}{l}\int_a^b V''(t)\cdot V(t)\,dt$$

→次ページへ